

Testen von Hypothesen

Beispiel:

In einer Fabrik werden Tüten mit Mehl abgefüllt. Bisherige Untersuchungen ergaben, dass dabei der Anteil der Tüten mit weniger als 1kg Mehl höchstens 2% beträgt. Ein Käufer hat den Eindruck, dass sich seit der Installation einer neuen Abfüllanlage der Anteil der Tüten mit weniger als 1kg Mehl erhöht hat.

Um eine Behauptung (Hypothese) zu überprüfen, wird eine Stichprobe der Länge n durchgeführt.

Im Eingangsbeispiel bedeutet dies, dass zum Beispiel 100 Mehltüten überprüft werden, ob sie weniger als 1kg haben oder nicht.

Aufgrund des Ergebnisses dieses Tests muss man sich dann zwischen den beiden Behauptungen entscheiden. Hierfür ist eine Entscheidungsregel nötig, wann welche Behauptung anzunehmen ist.

Wichtige Angaben beim Hypothesentest:

- Länge n der Stichprobe: $n = 100$
- Testgröße T : T : Anzahl der Mehltüten mit weniger als 1kg
- Nullhypothese: $H_0: p \leq 0,02$ Gegenhypothese: $H_1: p > 0,02$
- Entscheidungsvorschrift, wann H_0 abzulehnen ist und wann nicht:
Annahmebereich von H_0 : $A = \{0; \dots; 5\}$
Ablehnungsbereich von H_0 : $\bar{A} = \{6; \dots; 100\}$

Fehlermöglichkeiten bei einem Hypothesentest:

Fehler 1. Art:

H_0 wird abgelehnt, obwohl sie wahr ist. Die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art wird mit α' (Irrtumswahrscheinlichkeit) bezeichnet.

Im Beispiel kann es sein, dass bei der Stichprobe mehr als 5 Mehltüten mit weniger als 1kg gefunden werden, woraufhin man sich für die Gegenhypothese entscheiden würde, obwohl in Wirklichkeit der Anteil der Mehltüten mit weniger als 1kg höchstens 2% beträgt.

Fehler 2. Art:

H_0 wird nicht abgelehnt, obwohl sie falsch ist.

Im Beispiel kann es sein, dass bei der Stichprobe höchstens 5 Mehltüten mit weniger als 1kg gefunden werden, woraufhin man sich für die Nullhypothese entscheiden würde, obwohl in Wirklichkeit der Anteil der Mehltüten mit weniger als 1kg mehr als 2% beträgt.

Die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art kann nur berechnet werden, wenn noch eine konkrete Wahrscheinlichkeit ($p > 0,02$) gegeben ist.

Darstellung der vier Entscheidungen:

Aufgrund der Stichprobe fällt die Entscheidung für in Wirklichkeit gilt	H_0	H_1
	H_0	H_1
H_0	richtige Entscheidung	Fehler 1. Art (α' -Fehler)
H_1	Fehler 2. Art (β -Fehler)	richtige Entscheidung

Berechnung des Fehlers 1. Art:

Allgemein gilt: $\alpha' = P_{H_0}(\bar{A})$

Im Beispiel: $\alpha' = P(T \geq 6) = 1 - P(T \leq 5) = 1 - 0,98452 = 0,01548$

Das Risiko irrtümlicherweise die Nullhypothese abzulehnen, obwohl sie stimmt, beträgt für diese Entscheidungsregel ca. 1,5%.

Wichtige Anmerkungen:

- Eine vorgegebene obere Schranke für den Fehler 1. Art wird als Signifikanzniveau α bezeichnet.
- Eine Verkleinerung des Fehlers 1. Art führt bei gleicher Stichprobenlänge n automatisch zu einer Vergrößerung des Fehlers 2. Art und umgekehrt. Bessere Ergebnisse für beide Fehlerarten lassen sich durch eine Erhöhung der Stichprobenlänge erzielen.

Ermitteln Sie den maximalen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem 5%-Signifikanzniveau:

$$A = \{0; \dots; c\} \quad \bar{A} = \{c+1; \dots; 100\}$$

$$P(T \geq c+1) \leq 0,05 \Rightarrow 1 - P(T \leq c) \leq 0,05 \Rightarrow P(T \leq c) \geq 0,95 \Rightarrow c = 5$$

$$\Rightarrow \bar{A} = \{6; \dots; 100\}$$

Testarten:

In allen folgenden Beispielen wird eine Vermutung mit dem sogenannten Signifikanztest entweder bestätigt oder widerlegt.

Dabei unterscheidet man den rechtsseitigen und den linksseitigen Signifikanztest.

Im Beispiel handelt es sich um einen rechtsseitigen Signifikanztest.